

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕРНОГО ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

А. С. Тихонов

Казанский государственный университет

Alexander.Tikhonov@ksu.ru

Определяющей составляющей электрохимической размерной обработки (ЭХО) является электрическое поле в межэлектродном промежутке. Согласно модели идеальной ЭХО потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа, удельная электропроводность электролита, выход металла по току и поляризация электродов постоянны. Расчет электрических полей при допущении их потенциальности аналогичен расчету полей потенциальных течений жидкости.

Двумерные математические модели ЭХО дают более точное описание, чем одномерные, и являются разумной альтернативой трехмерным моделям при расчетах сложных деталей по их сечениям. Точные аналитические решения задач ЭХО могут служить тестовыми для расчетов численными методами, их суперпозицией можно приближенно описать формообразование сложными катодными устройствами. При применении двумерной модели идеального ЭХО такие решения получают, используя методы теории функций комплексного переменного. Для более подробного описания постановки и решения краевых задач электрохимического формообразования необходимо обратиться к монографиям [1, 2].

Например, рассмотрим формообразование двумя симметричными относительно оси, параллельной подаче, полубесконечными катодами-пластинками для анода с симметричной щелью и симметричными кромками. Схема сечения правой симметричной части межэлектродного промежутка указана на рис. 1.

Здесь DFC – катод-пластинка; DRA – ось симметрии;  $AB_1B_2C$  – анод;  $B_1$  и  $B_2$  – точки перегиба анодной границы; R – точка максимума скорости фиктивного потока; L – расстояние от оси симметрии до пластинки; l – ширина щели на аноде.

Область  $D_w$  комплексного потенциала течения изображена на рис. 2. Область годографа скорости изображена на рис. 3, а вспомогательная область – на рис. 4. Промежуточная область отображения выбрана так, как показано на рис. 5.

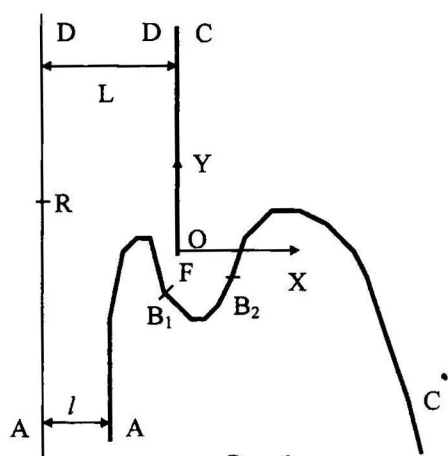


Рис. 1

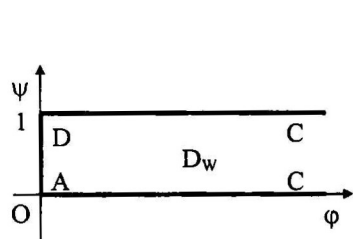


Рис. 2

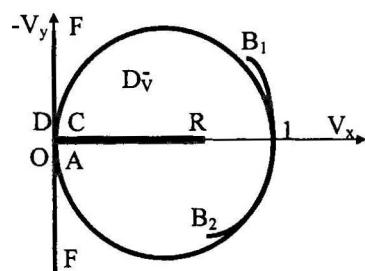


Рис. 3

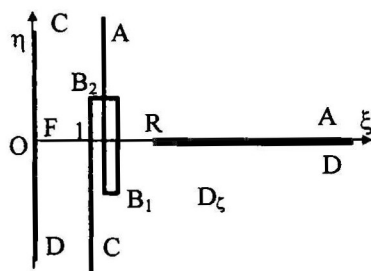


Рис. 4

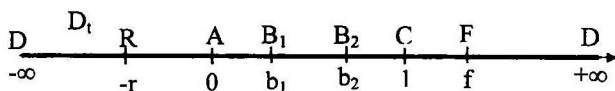


Рис. 5

На рис. 3 осуществляется следующий обход границы годографа скорости: из точки F на положительной бесконечности вертикальной оси в точку D начала координат; затем по разрезу DRA в точку A и по окружности - в точку B<sub>1</sub>; далее возвращаемся по разрезу на окружности в точку B<sub>2</sub>. Для большей наглядности точки B<sub>1</sub> и B<sub>2</sub> на рисунке немного сдвинуты относительно своего истинного положения. По окружности перемещаемся в точку C, и, наконец, по отрицательной половине вертикальной оси - вновь в точку F. Отметим, что область годографа является многолистной - перекрытие двух листов наблюдается в окрестности окружности AB<sub>1</sub>B<sub>2</sub>C.

Аналогичным обходу на рис. 3 совершается обход на рис. 4 во вспомогательной области (полученной преобразованием инверсии). Для большей наглядности разрез AB<sub>1</sub>B<sub>2</sub>C разнесен относительно истинного своего положения так, как он бы выглядел в объемном виде.

Отображение D<sub>w</sub> на D<sub>t</sub> производится по формуле

$$t = \left( \frac{e^{\pi w} - 1}{e^{\pi w} + 1} \right)^2. \quad (1)$$

Отображение D<sub>t</sub> на D<sub>ζ</sub> задается интегралом Шварца-Кристоффеля

$$\zeta = C_1 \int_s^t s^{-\frac{3}{2}} (s-1)^{-2} (s-b_1)(s-b_2)(s+r) ds. \quad (2)$$

Из того, что при  $1 < t < \infty$  имеем  $\zeta = i\eta$ , следует  $C_1 = iC$ , где C - действительная величина. После интегрирования (2) получается выражение

$$\zeta = iC \left[ -\frac{1}{2} [b_1 b_2 + b_1 + b_2 - 3 + r(3b_1 b_2 - b_1 - b_2 - 1)] \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1} \right) - \ln \left( \frac{\sqrt{f}-1}{f+1} \right) \right] + \right. \\ \left. + iC \left[ (r+1)(1-b_1)(1-b_2) \left( \frac{\sqrt{t}}{1-t} - \frac{\sqrt{f}}{1-f} \right) - 2b_1 b_2 r \left( \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{f}} \right) + 2(\sqrt{t} - \sqrt{f}) \right] \right] \quad (3)$$

На АС  $0 < t < 1$  и  $\operatorname{Re}(\zeta) = 1$ . Значит, из предыдущей формулы можно найти

$$C = \frac{2}{\pi [b_1 b_2 + b_1 + b_2 - 3 + r(3b_1 b_2 - b_1 - b_2 - 1)]} = \frac{2}{\pi T}, \quad (4)$$

где  $T = b_1 b_2 + b_1 + b_2 - 3 + r(3b_1 b_2 - b_1 - b_2 - 1)$ .

На участке DRA  $-\infty < t < 0$  и  $\operatorname{Im} \zeta = 0$ . Это приводит к уравнению

$$r = \frac{2\sqrt{f} - (1-b_1)(1-b_2) \frac{\sqrt{f}}{f-1} - \frac{1}{2} (b_1 b_2 + b_1 + b_2 - 3) \ln \left( \frac{\sqrt{f}-1}{\sqrt{f}+1} \right)}{2b_1 b_2 \frac{1}{\sqrt{f}} + (1-b_1)(1-b_2) \frac{\sqrt{f}}{f-1} + \frac{1}{2} (3b_1 b_2 - b_1 - b_2 - 1) \ln \left( \frac{\sqrt{f}-1}{\sqrt{f}+1} \right)}. \quad (5)$$

Из (1) находим

$$\varphi_F = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{\sqrt{f}+1}{\sqrt{f}-1} \right).$$

Координаты точек физической плоскости ищутся тогда по формуле

$$z = \int_{\varphi_F + i}^w \zeta(s) ds. \quad (6)$$

На анодной границе  $w = \varphi$ . Интегрируя и разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$x = \varphi + \frac{2}{\pi T} (-2b_1 b_2 r + 2), \quad y = \frac{\varphi^2 - 1 - \varphi_F^2}{2} + \frac{2}{\pi T} [A + B + D], \quad (7)$$

где

$$A = \frac{1}{4\pi} (r+1)(1-b_1)(1-b_2) \left( e^{\pi\varphi} + e^{-\pi\varphi} + \frac{2(f+1)}{f-1} \right),$$

$$B = -2b_1b_2r \left[ \frac{2}{\pi} \left[ \ln(e^{\pi\varphi} - 1) - \ln\left(\frac{2\sqrt{f}}{\sqrt{f}-1}\right) \right] - \varphi + \varphi_F \right],$$

$$D = 2 \left[ \frac{2}{\pi} \left[ \ln(e^{\pi\varphi} + 1) - \ln\left(\frac{2}{\sqrt{f}-1}\right) \right] - \varphi + \varphi_F \right].$$

Так как  $\chi_{ARD} = -L$ , то из формул (6) и (7) при  $\varphi=0$  следует

$$L = -\frac{4}{\pi T}, \quad l = -\frac{4b_1b_2r}{\pi T}.$$

Из выражений для  $l$  и  $L$  и связи (5) теперь находим:  $r = l / Lb_1b_2$ .

Подставляя  $r$  в выражение для  $L$ , получаем квадратное уравнение для определения  $b_1$

$$b_1^2(b_2+1)b_2L + b_1\left(b_2^2L - 3b_2L + 3b_2l - l + \frac{4b_2}{\pi}\right) - (b_2+1)l = 0.$$

Математический параметр  $b_2$  отвечает за наличие кромки анода. В том случае, если он принимает значение, равное единице, кромки анода нет. Задав отстояние пластинки-катода от оси симметрии  $L$  и ширину щели  $l$ , из квадратного уравнения находим  $b_1$ , затем вычисляем  $r$ , а потом решаем численно уравнение (5) для определения  $f$ . После этого решение оказывается полностью определенным. Приравнявая к нулю  $L$  или  $l$ , получаем формулы для частных случаев. Сравнение с тестовыми расчетами для одной пластинки [1] показывают корректность полученных формул.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Клоков В.В. *Электрохимическое формообразование*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983. – 80 с.
2. Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е.И. *Методы расчета электрохимического формообразования*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 387 с.